

Kurvendiskussion

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 2$

1. Ableitungen

Für die spätere Untersuchung bestimmt man die ersten drei Ableitungen: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$

Beispiel: $f'(x) = \frac{3}{16}x^2 - \frac{3}{4}x$, $f''(x) = \frac{3}{8}x - \frac{3}{4}$, $f'''(x) = \frac{3}{8}$

2. Definitionsbereich

Man bestimmt den Definitionsbereich der Funktion, denn nur innerhalb dieses Bereiches ist es sinnvoll, Untersuchungen über die Eigenschaften der Funktion anzustellen.

Beispiel: Es existieren keine Definitionslücken $\Rightarrow D=\mathbb{R}$

3. Symmetrien:

Man stellt fest, ob die Funktion achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse oder punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs ist. Bei einer vorliegenden Symmetrie braucht die Funktion nur noch für $x \geq 0$ untersucht werden.

Achsensymmetrie: $f(-x) = f(x)$

Bei ganzrationalen Funktionen: Es kommen nur Summanden mit ungeraden Exponenten vor.

Punktsymmetrie: $f(-x) = -f(x)$

Bei ganzrationalen Funktionen: Es kommen nur Summanden mit geraden Exponenten vor.

Beispiel: Es existieren Summanden mit geraden und ungeraden Exponenten \Rightarrow keine Punktsymmetrie zum Ursprung oder Achsensymmetrie bzgl. der y-Achse.

4. Schnittpunkte mit den Achsen:

Man sucht für das spätere Zeichnen des Graphen die Schnittpunkte mit den Achsen. Ggf. eine Nullstelle raten und anschließend eine Polynomdivision durchführen.

Nullstellen:

Nullstellen sind Lösungen der Gleichung $f(x) = 0$.

Schnittstelle mit der y-Achse:

Bestimme $f(0)$.

Beispiel: $f(x) = 0 \Rightarrow P(-2|0)$ und $P(4|0)$ sind Nullstellen.

$f(0) = 2 \Rightarrow P(0|2)$ ist Schnittpunkt mit der y-Achse

5. Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$ bzw. gegen Definitionslücken

Untersuchung der Funktion in den Randpunkten des Definitionsbereichs.

Wenn der Definitionsbereich nicht beschränkt ist, dann sind die beiden Grenzwerte

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ zu bestimmen. Das Verhalten wird bei rationalen Funktionen durch

den größten Exponenten bestimmt.

Beispiel: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

6. Extrempunkte und Monotonieverhalten

Bestimmen der relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte).
Nach den Extremstellen auch die Extrempunkte bestimmen!

Hochpunkt:

$f'(x)=0$ und $f''(x)<0 \Rightarrow$ Maximum

Tiefpunkt:

$f'(x)=0$ und $f''(x)>0 \Rightarrow$ Minimum

Vorzeichenwechselkriterium:

$f'(x)=0$ und $f''(x)=0 \Rightarrow$ Vorzeichenwechsel untersuchen

$f'(x)$ wechselt von $+$ nach $- \Rightarrow$ Wechsel von mon. steigend \rightarrow mon. fallend \Rightarrow Maximum

$f'(x)$ wechselt von $-$ nach $+$ \Rightarrow Wechsel von mon. fallend \rightarrow mon. steigend \Rightarrow Minimum

Monotonie:

$f'(x)>0 \Rightarrow$ monoton steigend

$f'(x)<0 \Rightarrow$ monoton fallend

Beispiel: $f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4$

$f''(0) = -3/4 > 0 \Rightarrow$ Maximum. $f(0) = 2 \Rightarrow$ Maximum bei $(0|2)$

$f''(4) = 3/4 < 0 \Rightarrow$ Minimum. $f(4) = 0 \Rightarrow$ Minimum bei $(4|0)$.

7. Wendepunkte und Krümmungsverhalten

Bestimmen der Wendepunkte, bzw. der Sattelpunkte

Wendepunkt:

$f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

Sattelpunkt:

$f'(x)=0$ und $f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

Vorzeichenwechselkriterium:

$f''(x)=0$ und $f'''(x)=0 \Rightarrow$ Vorzeichenwechsel untersuchen

$f''(x)$ wechselt von $+$ nach $- \Rightarrow$ Wechsel von linksgekrümmt \rightarrow rechtsgekrümmt

$f''(x)$ wechselt von $-$ nach $+$ \Rightarrow Wechsel von rechtsgekrümmt \rightarrow linksgekrümmt

Krümmungsverhalten:

$f''(x)>0 \Rightarrow$ linksgekrümmt

$f''(x)<0 \Rightarrow$ rechtsgekrümmt

Beispiel: $f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

$f'''(2) = 3/8 \neq 0 \Rightarrow$ Wendestelle. $f(2)=1 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $(2|1)$.

Vorzeichenwechsel: $f''(x)$ wechselt von $-$ nach $+$ \Rightarrow rechtsgekrümmt \rightarrow linksgekrümmt

8. Graph zeichnen

Mit allen bisher gesammelten Informationen lässt sich in den meisten Fällen nun der Graph zeichnen. Ggf. kann eine ergänzende Wertetabelle angelegt werden.

Beispiel: siehe Graph

