Die natürliche Exponentialfunktion

Gegeben ist die Funktion: f(x) = 2^x.
Gesucht ist die Ableitung: f'(x)

Bei Potenzfunktionen gibt es eine Formel: f(x) = x^n => f'(x) = n x^{n-1}
Frage: Gibt es auch für f(x) = 2^x eine Formel für die Ableitung? Bisher noch nicht.

Wir erinnern uns, wie man allgemein die **Ableitung** bestimmt, nämlich mit dem Limes des Differenzenquotienten:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Einsetzen von f(x) = 2^x :

$$f'(x) = \lim_{h\to0} \frac{2^{x+h}-2^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{2^x \cdot 2^h-2^x}{h} \qquad \text{(Potenzgesetze angewendet)}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{2^x \cdot (2^h-1)}{h} \qquad \text{(ausklammern)}$$

$$= 2^x \cdot \lim_{h\to0} \frac{(2^h-1)}{h} \qquad \text{(}2^x\text{ vorklammern, da nicht von h abhängig)}$$

$$= f(x) \cdot \lim_{h\to0} \frac{(2^h-1)}{h} \qquad \text{(statt }2^x\text{ wieder f(x) schreiben)}$$

Es ist also:

$$f'(x) = f(x) \cdot \lim_{h\to0} \frac{(2^h-1)}{h}$$

Das gilt für alle x, also natürlich auch für x = 0. Einsetzen von x = 0 ergibt.

$$f'(0) = 1 \cdot \lim_{h\to0} \frac{(2^h-1)}{h}$$

Der noch zu berechnende Limes entspricht somit gerade der Ableitung an der Stelle 0.

$$\boxed{f'(x) = f(x) \cdot f'(0)}$$

Das sieht ganz ok aus, aber f'(0) ist noch ein Zahlenwert den wir nicht kennen.

Wir bilden mal noch keinen Grenzwert, aber setzen einfach einen ganz kleinen Wert für h ein, z.B. h = 0,01. Dann folgt:

$$f'(0) \approx \frac{(2^h-1)}{h} = \frac{(2^{0,01}-1)}{0,01} = 0,7$$

Die Ableitung lässt sich also total einfach aus dem Funktionswert berechnen:

$$\boxed{f'(x) = f(x) \cdot 0,7 = 2^x \cdot 0,7}$$

x	0	1	2	3
f(x)	1	2	4	8
f'(x)	0,7	2· 0,7 = 1,4	4 · 0,7 = 2,8	8 · 0,7 = 5,6

Jetzt haben wir die Ableitung für f(x) = 2^x :

$$f'(x) = f(x) \cdot 0,7 = 2^x \cdot 0,7$$

Für f(x) = 3^x kann man analog vorgehen und erhält:

$$f'(x) = f(x) \cdot 1,1 = 3^x \cdot 1,1$$

Zusammengefasst:

Wir können uns jetzt die Ableitungen für verschiedene Exponentialfunktionen aufschreiben. Wir stellen fest, dass mit größerer Basis der Faktor größer wird. Bei 3 ist er schon größer als 1, während er bei 2 noch kleiner als 1 ist.

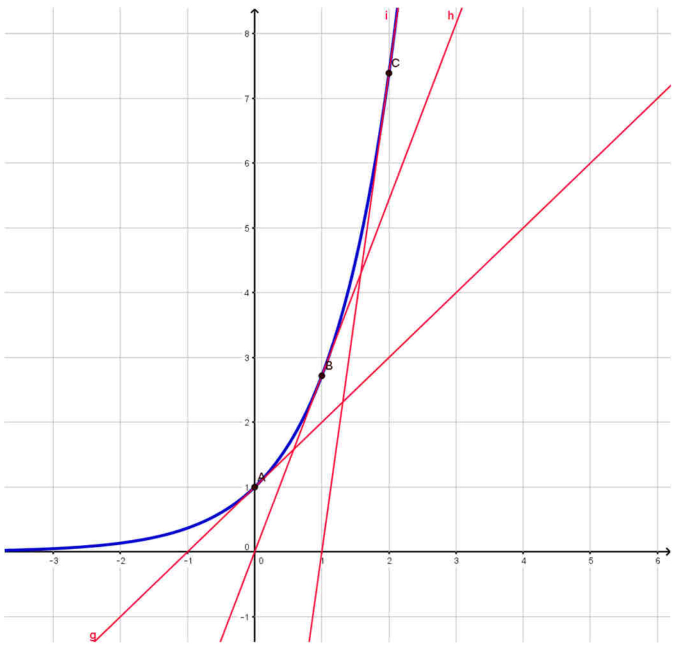
f(x)	2^x	3^x	4^x	5^x
Faktor	0,7	1,1	1,4	1,6
f'(x)	$0{,}7 \cdot 2^x$	$1{,}1 \cdot 3^x$	$1{,}4 \cdot 4^x$	$1{,}6 \cdot 5^x$

Frage: Gibt es eine Basis a zwischen 2 und 3, so dass der Faktor gerade genau 1 ist? Dann wäre die Ableitung total einfach, nämlich: f'(x) = f(x)

Diesen Zahlenwert gibt es !

Die Zahl a, für die die Funktion a^x mit ihrer Ableitung übereinstimmt,
heißt **Eulersche Zahl e**. Dabei ist **e = 2,71828**.
Die zugehörige Exponentialfunktion **f(x) = e^x** heißt **natürliche Exponentialfunktion**.
Es gilt:

$$f'(x) = f(x) = e^x$$



Die Steigung der Tangente an einem beliebigen Punkt (=Ableitung) stimmt jeweils mit dem Funktionswert in diesem Punkt überein.

x	0	1	2
f(x)	1	2,71828	7,3891
f'(x)	1	2,71828	7,3891