Nullstellenberechnung

1. Lineare Funktion

Beispiel: $f(x) = 2x - 4$

$0 = 2x - 4 \quad |+4$
$4 = 2x \quad |:2$
$2 = x$

2. Linearfaktoren

Beispiel: $f(x) = (x - 4)\cdot(x+3)$

Tipp: Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

$0 = (x - 4)\cdot(x+3)$
$x - 4 = 0$ oder $x + 3 = 0$
$\Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = -3$

3. Rein quadratische Funktion

Beispiel: $f(x) = x^2 - 4$

Tipp: Anwendung der 3. Binomischen Formel oder Auflösen nach x^2 und anschließendes Wurzelziehen (Achtung zwei Lösungen der Wurzel)

$0 = x^2 - 4$
$0 = (x+2)\cdot(x-2)$
$\Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

4. Quadratische Funktion ohne Konstante

Beispiel: $f(x) = x^2 - 4x$

Tipp: x ausklammern. Man erhält eine Darstellung in Linearfaktoren.

$0 = x^2 - 4x$
$0 = x \cdot (x - 4)$
$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4$

5. Quadratische Funktion

Beispiel: $f(x) = x^2 - 8x + 12$

Tipp: pq-Formel, abc-Formel oder quadratische Ergänzung

pq-Formel: Voraussetzung: $0 = x^2 + px + q$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{-8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 12}$$
$$= 4 \pm \sqrt{4} = 4 \pm 2$$
$$\Rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = 2$$

abc-Formel: Voraussetzung: $0 = ax^2 + bx + c$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1}$$
$$= \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2}$$
$$\Rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = 2$$

Quadratische Ergänzung:

$0 = x^2 - 8x + 12$

$:2 \rightarrow 4 \rightarrow (\ )^2$

$0 = \underbrace{x^2 - 8x + 16}_{} \underbrace{- 16 + 12}_{}$

$0 = (x - 4)^2 - 4 \quad | +4$
$4 = (x - 4)^2 \quad | \sqrt{}$
$2 = x - 4$ oder $-2 = x - 4$
$\Rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = 2$

6. Funktion 4-ten Grades (nur x^4, x^2 und Konstante)

Beispiel: $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

Hinweis: Es sind bis zu vier Lösungen möglich.

Tipp: Substitution $x^2 = z$, Lösen der quadratischen Gleichung, Rücksubstitution

$0 = x^4 - 5x^2 + 4$

Substitution: $x^2 = z$

$0 = z^2 - 5z + 4$

Lösen mit pq- oder abc-Formel oder quadratischer Ergänzung.

$\Rightarrow z_1 = 1,\ z_2 = 4$

Rücksubstitution: $z = x^2$

$x^2 = 1,\ x^2 = 4$
$\Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2$